

SOMMAIRE

1 - Mathématiques pour l'étude des systèmes automatiques asservis

A - Décomposition d'une fraction polynômiale en éléments simples.....	7
B - Résolution d'équations différentielles : transformées de Laplace.....	10
C - Résolution d'une équation différentielle.....	14
D - Modélisation d'un amortisseur.....	15

2 - Etude des systèmes automatiques asservis dans le domaine temporel

A - Inventaire des signaux d'entrée et critères d'un asservissement.....	17
B - Structure d'un asservissement.....	19
C - Fonction transfert du premier ordre dans le domaine temporel.....	20
D - Fonction transfert du second ordre dans le domaine temporel.....	23
E - Schéma fonctionnel ou schéma-bloc.....	28
F - Stabilité d'un système selon le critère de Routh.....	36
G - Précision des asservissements dans le domaine temporel.....	39

3 - Etude des systèmes automatiques asservis dans le domaine fréquentiel

A - Diagrammes de Bode : réponse harmonique.....	45
B - Fonction transfert du premier ordre.....	47
C - Fonction transfert du second ordre.....	52
D - Etude de la stabilité d'un système dans le domaine fréquentiel.....	62
E - Correcteurs pour asservissements.....	64
F - Etude d'un enrouleur de bandes de tissu fin.....	70
G - Moteur électrique à courant continu.....	77

4 - Etude des systèmes automatiques combinatoires

A - Définition des opérateurs logiques élémentaires.....	84
B - Théorèmes de De Morgan.....	91
C - Synthèse des relations fondamentales.....	91
D - Définition des opérateurs logiques plus élaborés.....	92
E - Feux de circulation tricolores.....	97
F - Contrôle de pièces après fabrication.....	99
G - Tri de caisses.....	101

5 - Etude des systèmes automatiques séquentiels

A - Système à mémoire	104
B - Mémoire à arrêt prioritaire	105
C - Mémoire à marche prioritaire.....	106
D - Mémoire à actions simultanées actives	107
E - Mémoire à actions simultanées passives	108
F - GRAFCET : Graphe fonctionnel de commande par étape et transition.....	110
G - Gestion des entrées et sorties d'un parking	119
H - Contrôle dimensionnel de paquets	122
I - Feux tricolores de circulation.....	125

6 - Mathématiques pour la cinématique et la statique des solides

A - Révisions : les vecteurs.....	127
-----------------------------------	-----

7 - Etude des liaisons entre solides et leur schématisation

A - Tableau des liaisons parfaites normalisées.....	136
B - Etude de liaisons normalisées par un exemple	138
C - Liaisons équivalentes	141

8 - Etude cinématique des solides

A - Cinématique analytique du solide.....	147
B - Trois méthodes de recherche vitesse et accélération d'un point d'un solide	155
C - Pompe à palette	158
D - Robot de peinture.....	160
E - Cinématique graphique plane du solide	163

9 - Etude statique des solides

A - Statique analytique	167
B - Statique graphique	178
C - Montage pour l'usinage d'une rainure.....	180
D - Presse hydraulique.....	181

10 - Cinétique des solides

A - Centre d'inertie d'un solide	182
B - Matrice d'inertie d'un solide.....	184

11 - Etude dynamique des solides

A - Torseur cinétique.....	189
B - Torseur dynamique	190
C - Principe fondamental de la dynamique.....	192
D - Méthode de résolution d'un problème de dynamique	193
E - Puissance développée par les forces extérieures agissant sur un solide.....	194
F - Travail et énergie.....	195
G - Dynamique d'un manège modélisé	195
H - Etude d'un treuil sur un sol penté	198
I - Etude cinétique et dynamique d'un rivet.....	200
J - Equilibrage d'un solide en rotation autour d'un axe fixe.....	205
K - Bras de robot manipulateur	209
L - Poulie embrayable.....	216

12 - Théorie des mécanismes

A - Mobilité et hyperstatisme.....	219
B - Scie sauteuse.....	222
C - Levier multiplicateur de force.....	225

13 - Les engrenages

A - Définition et formules.....	230
B - Palan	232
C - Boîte de vitesses de tour	233
D - Réducteur de vitesse à train épicycloïdal	235
E - Réducteur de vitesse de mélangeur.....	237

14 - Résistance des matériaux : RDM

A - Généralités	239
B - Traction ou compression	240
C - Cisaillement.....	241
D - Torsion simple	241
E - Torsion hyperstatique	243
F - Flexion simple	245
G - Flexion hyperstatique	249
H - Calcul des dimensions d'un ressort.....	250
I - Calcul du module d'une dent d'un pignon.....	251

15 - Méthode d'analyse des systèmes

A - SADT : System Analysis Design Technic.....	253
B - FAST : Function Analysis System Technic.....	255

1 - Mathématiques pour l'étude des automatismes asservis

A - Décomposition d'une fraction polynômiale en éléments simples

1 - Théorème de Bezout

Soit une fraction polynômiale de la forme $\frac{P(x)}{Q(x)}$

Le mathématicien Bezout a démontré qu'il était possible de mettre cette fraction sous la forme d'une somme de fractions simples (cette méthode n'est pas la seule).

Exemple
$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{2x+1}{x^3(x-1)^2} = \frac{A}{x^3} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x} + \frac{D}{(x-1)^2} + \frac{E}{x-1}$$

Il peut exister une partie entière si le degré du numérateur $P(x)$ est supérieur à celui du dénominateur $Q(x)$. Ce cas ne se rencontre pas en Sciences Industrielles.

Dans cet exemple, les racines du dénominateur sont réelles, on dit que l'on réalise une décomposition en éléments simples de première espèce. Notez que x^3 se trouve au dénominateur et que le développement de Bezout impose trois fractions de la forme suivante :

$\frac{A}{x^3} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x}$. Il en est de même pour $(x-1)^2$ qui impose deux fractions $\frac{D}{(x-1)^2} + \frac{E}{x-1}$

Il faut développer en autant de fractions que la puissance du dénominateur. C'est une erreur fréquente chez les étudiants qui se contentent de placer seulement le terme avec sa puissance. Le but est maintenant de déterminer les constantes A, B, C, D, E.

Voici le résultat de la décomposition en éléments simples de l'exemple ci-dessus.

$$A = 1 \quad B = 4 \quad C = 7 \quad D = 3 \quad E = -7$$

Vous reviendrez sur cet exercice quand vous aurez appris une méthode efficace.

2 - Méthode de recherche des coefficients A, B, C

Développez l'expression suivante en éléments simples, selon le théorème de Bezout.

$$F(x) = \frac{1}{x(x^2+3x+2)} = \frac{1}{x(x+1)(x+2)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{x+2} \text{ car } x = -1 \text{ et } x = -2 \text{ sont racines.}$$

Le dénominateur est du troisième degré, le développement se fait en trois fractions.

e - Correcteur proportionnel dérivé : PD en série

Ce correcteur a pour fonction transfert $C(p) = K.(1 + \tau_d.p)$

τ_d est la constante de temps.

Un correcteur de ce type accroît le gain et avance la phase de $+\frac{\pi}{2}$.

Ce correcteur est utilisé dans les fréquences très hautes. Un correcteur de la forme $1 + \tau.p$ se comporte comme un dérivateur pour les fréquences $\omega \gg \frac{1}{\tau}$.

f - Correcteur proportionnel intégral dérivé : PID en série

Ce correcteur a pour fonction transfert $C(p) = K \frac{1+\tau_1.p}{1+\tau_2.p}$

Si $\tau_1 > \tau_2$ les courbes de gain et de phase sont croissantes. Les courbes "montent" si τ_1 du numérateur est plus grande que τ_2 du dénominateur.

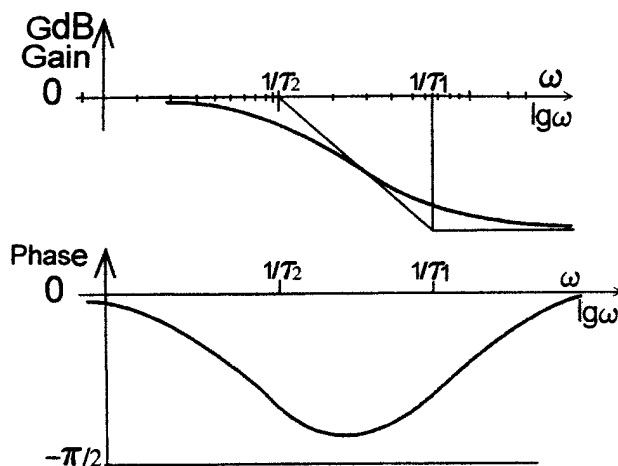
Si $\tau_2 > \tau_1$ les courbes de gain et de phase sont décroissantes. Les courbes "descendent" si τ_2 du dénominateur est plus grande que τ_1 du numérateur.

Le terme dominant en p influe sur les courbes de gain et de phase.

Correcteur à retard de phase dans les diagrammes de Bode

La phase et le gain "descendent" donc le terme en p est plus fort en bas (au dénominateur) puisque ça descend !...

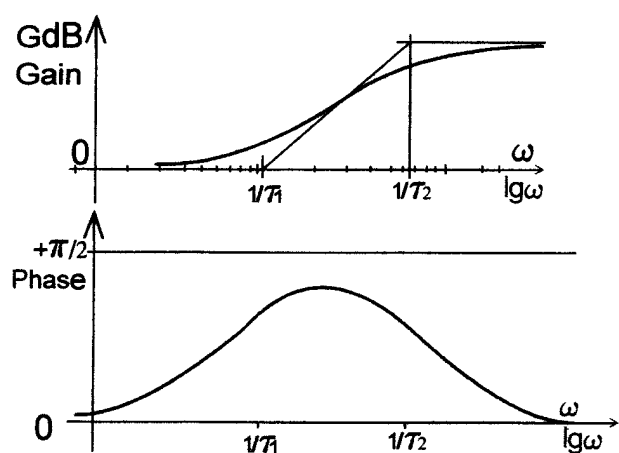
$$C(p) = K \frac{1+\tau_1.p}{1+\tau_2.p} \text{ avec } \tau_2 > \tau_1$$



Correcteur à avance de phase dans les diagrammes de Bode

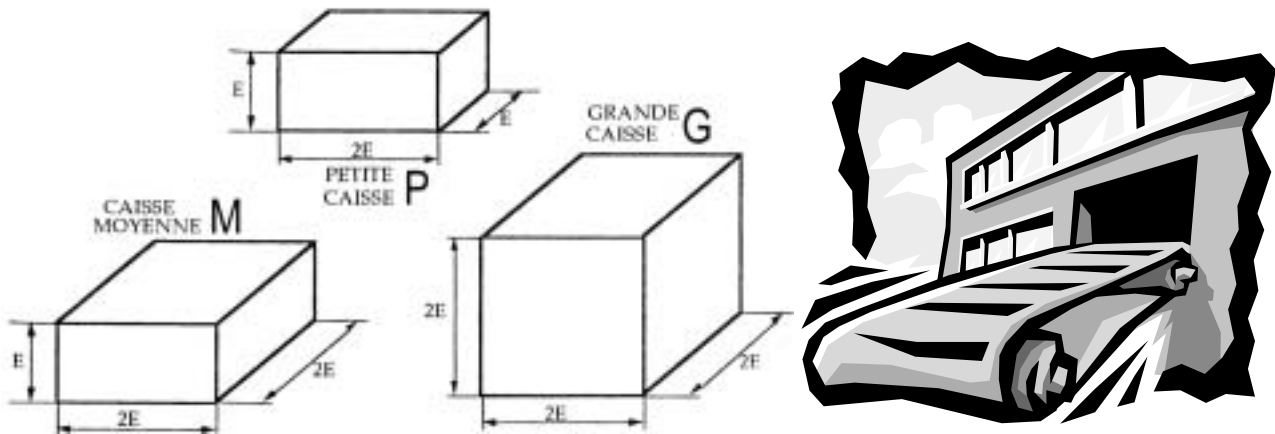
La phase et le gain "montent" donc le terme en p est plus fort en haut (au numérateur) puisque ça monte !...

$$C(p) = K \frac{1+\tau_1.p}{1+\tau_2.p} \text{ avec } \tau_1 > \tau_2$$

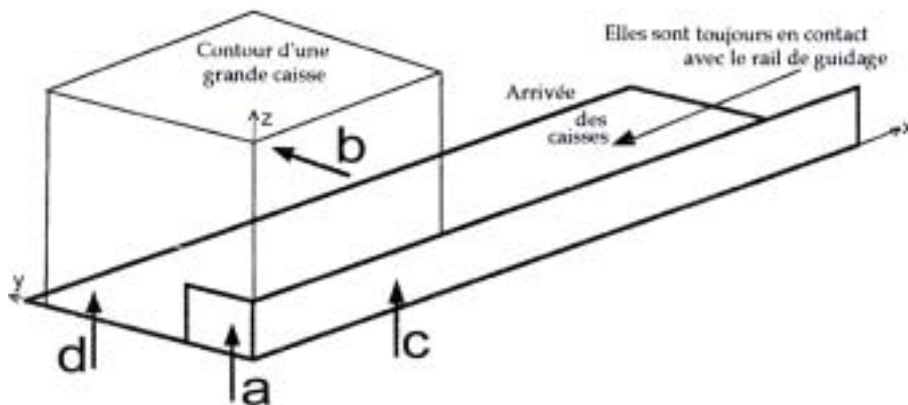


G - Tri de caisses

Observez ces caisses qui ont des dimensions égales à E ou $2E$ (E comme épaisseur). Leur référence **G**rande, **M**oyenne, **P**etite, est logique car la Grande a 3 dimensions égales à $2E$, la Moyenne a 2 dimensions égales à $2E$, et la Petite a une dimension égale à $2E$. Elles sont amenées sur un tapis jusqu'au point de contrôle.



Le but du problème est de savoir reconnaître celle qui se trouve devant les quatre capteurs de présence a , b , c , d . Pour les détecter, on a placé un capteur " b " sur \vec{z} , à une hauteur plus grande que E et plus petite que $2E$. Ce capteur détecte les caisses de hauteur $2E$. Mais on ne peut pas en déduire qu'elles sont du type "Grande", car on ne détient qu'un seul des trois paramètres nécessaires pour reconnaître la catégorie de la caisse.



Les deux autres capteurs " c " et " d " assurent le même travail que " b ". Le capteur " c " sur l'axe \vec{x} et le capteur " d " sur l'axe \vec{y} . Que fait le capteur " a " ? Il informe qu'une caisse est présente. En effet, si $a = 0$ et si b , c , et d sont actifs, on peut prévoir une erreur technique ! Les caisses arrivent dans n'importe quelle position, mais toujours en contact avec le rail de guidage.

Questions

Remplissez le tableau de vérité et détectez la catégorie de la caisse qui se présente. Utilisez les tableaux de Karnaugh pour déterminer l'équation de la catégorie de la caisse.

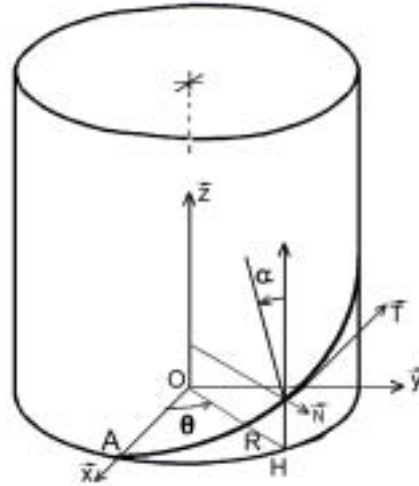
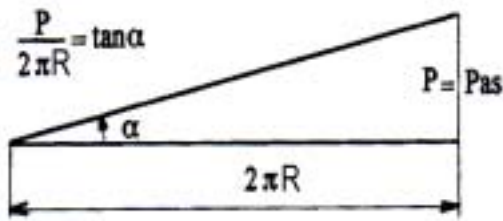
Donnez les équations avec la cellule XOR quand cela est possible et tracez les logigrammes pour chaque caisse de M , P et G sans contrainte ainsi que les circuits à contacts électriques.

$$\vec{V}_M = \left\{ a \cdot t - a \cdot t \cdot \cos\left(\frac{at^2}{2R}\right) \right\} \vec{x} + \left\{ a \cdot t \cdot \sin\left(\frac{at^2}{2R}\right) \right\} \vec{y}$$

$$\vec{A}_M = \left\{ a - a \cdot \cos\left(\frac{a \cdot t^2}{2R}\right) + \frac{a^2 t^2}{R} \sin\left(\frac{at^2}{2R}\right) \right\} \vec{x} + \left\{ a \cdot \sin\left(\frac{at^2}{2R}\right) + \frac{a^2 t^2}{R} \cos\left(\frac{at^2}{2R}\right) \right\} \vec{y}$$

c - Etude d'une hélice en coordonnées cartésiennes

Cylindre de rayon R,
Hélice de pas p.



Exprimez la trajectoire de M et déterminez la vitesse et l'accélération du point M par rapport au repère cartésien Oxyz. Déterminez le module de la vitesse et de l'accélération, l'accélération tangentielle et l'accélération normale.

Corrigé

Recherche de la trajectoire $\vec{OM} = \vec{OH} + \vec{HM}$ (relation de Chasles)

H est le point projeté du point M sur le plan Oxy. Il décrit un cercle de coordonnées

$$\vec{OH} = R \cdot \cos(\theta) \vec{x} + R \cdot \sin(\theta) \vec{y}$$

La définition du mouvement d'une hélice permet d'écrire la proportionnalité entre la translation du point M sur l'axe de l'hélice et la rotation $\theta(t)$ soit $z(t) = k \cdot \theta$.

Après un tour ($2 \cdot \pi$) la vis a avancé d'une valeur égale au pas (p caractéristique de la vis).

Traduisez par $p = k \cdot 2 \cdot \pi$, donc $k = \frac{p}{2 \cdot \pi}$ et $Z_{M(t)} = \frac{p}{2 \cdot \pi} \theta(t)$

Coordonnées cartésiennes de M : $\vec{OM} = R \cdot \cos(\theta) \vec{x} + R \cdot \sin(\theta) \vec{y} + \frac{p}{2 \cdot \pi} \theta(t) \vec{z}$

La vitesse \vec{V}_M est obtenue par la dérivée de la trajectoire, soit

$$\vec{V}_M = -R \cdot \frac{d\theta}{dt} \cdot \sin(\theta) \cdot \vec{x} + R \cdot \frac{d\theta}{dt} \cdot \cos(\theta) \cdot \vec{y} + \frac{p}{2 \cdot \pi} \frac{d\theta}{dt} \vec{z} \text{ son module est } |\vec{V}_M| = \frac{d\theta}{dt} \sqrt{R^2 + \frac{p^2}{4\pi^2}}$$

L'accélération \vec{A}_M est obtenue par la dérivée de la vitesse, soit

$$\vec{A}_M = -R \cdot \left\{ \frac{d^2\theta}{dt^2} \sin(\theta) + \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 \cos(\theta) \right\} \vec{x} + R \cdot \left\{ \frac{d^2\theta}{dt^2} \cos(\theta) - \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 \sin(\theta) \right\} \vec{y} + \frac{p}{2\pi} \frac{d^2\theta}{dt^2} \vec{z}$$

Le module de l'accélération $|\vec{A}_M| = R \sqrt{\left(\frac{d^2\theta}{dt^2}\right)^2 + \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^4 + \frac{p^2}{4\pi^2} \left(\frac{d^2\theta}{dt^2}\right)^2}$