

Table des matières

Partie M. MÉCANIQUE ET MÉCANISMES

M1. GÉOMÉTRIE

ELEMENTS SYNTHÉTIQUES DE COURS

M1.1. Notion de base et de repère	13
1. Définitions	
2. Différence entre base et repère	
M1.2. Position d'un point par rapport à un repère – Notion de trajectoire	15
M1.3. Position d'un solide par rapport à un repère.....	15
1. Position du solide S_i	
2. Orientation angulaire du solide S_i	
M1.4. Position relative de deux solides – Paramétrage géométrique des liaisons.....	19
M1.5. Torseur des petits déplacements	22
1. Petit déplacement d'un point d'un solide par rapport à un repère	
2. Relation entre les petits déplacements par rapport à un repère de deux points d'un même solide – Torseur des petits déplacements	

APPLICATIONS 24

- Exemple de paramétrage géométrique d'une chaîne ouverte de solides à configuration plane
- Exemple de paramétrage géométrique d'une chaîne fermée de solides à configuration plane
- Exemple de recherche de la position d'un point dans un repère. Cas d'une chaîne ouverte
- Trajectoires d'un point dans des repères fixes et mobiles
- et 6. Recherche de la loi entrée-sortie géométrique d'une chaîne fermée de solides
- Application concernant le torseur des petits déplacements

M2. CINÉMATIQUE DU SOLIDE

ELEMENTS SYNTHÉTIQUES DE COURS

M2.1. Vitesse d'un point par rapport à un repère	39
1. Définition	
2. Expression de la vitesse linéaire d'un point dans la base associée au repère de référence	
3. Expression de la vitesse linéaire d'un point dans une base mobile. Formule de la dérivation composée	
4. Expression de l'accélération d'un point par rapport à un repère	
M2.2. Distributivité des vitesses. Torseur cinématique	43
1. Distributivité des vitesses des points d'un solide indéformable en mouvement par rapport à un repère	
2. Conséquences et propriétés	
3. Torseur cinématique d'un solide S en mouvement par rapport à un repère R	

M2.3. Torseur cinématique – Liaisons entre solides	46
M2.4. Composition des vitesses.....	49
1. Composition des vitesses linéaires	
2. Composition des vitesses angulaires	
3. Composition des torseurs cinématiques	
M2.5. Les assemblages de solides – Chaînes ouvertes, chaînes fermées.....	51
1. Chaînes ouvertes de solides	
2. Chaînes fermées de solides	
M2.6. Les assemblages de liaisons – Liaisons équivalentes	54
1. Liaisons simples en série – Liaison équivalente	
2. Liaisons simples en parallèle – Liaison équivalente	
APPLICATIONS	59
1. Détermination analytique de vitesses. Mouvements plans. Chaîne ouverte de solides	
2. Détermination analytique de vitesses. Mouvements spatiaux	
3. Détermination analytique d'une accélération	
4. Détermination analytique et graphique d'un centre instantané de rotation dans un mouvement plan	
5. Chaîne fermée de solides. Recherche analytique d'une loi entrée-sortie cinématique	
6. Chaîne fermée de solides. Cinématique graphique	
7. Liaisons simples en série – Liaison équivalente	
M3. STATIQUE DU SOLIDE	
ELEMENTS SYNTHÉTIQUES DE COURS	
M3.1. Modélisation des actions mécaniques.....	69
1. Action mécanique élémentaire	
2. Pressions de contact	
3. Action mécanique résultante	
4. Torseur des actions mécaniques	
5. Torseur des actions mécaniques transmissibles par les liaisons : les torseurs des actions de liaison	
M3.2. Principe fondamental de la statique : PFS	83
1. Enoncé du PFS dans le cas d'un solide et théorèmes généraux	
2. Enoncé du PFS dans le cas d'un ensemble de solides et théorèmes généraux	
M3.3. Statique graphique	90
1. Solide ou ensemble des solides soumis à deux forces	
2. Solide ou ensemble des solides soumis à trois forces	
3. Solide ou ensemble des solides soumis à quatre forces	
APPLICATIONS	99
1. Résultante et calcul de pressions de contact – Liaison pivot glissant	
2. Résultante et calcul de pressions de contact – Liaison glissière	
3. Calcul des inconnues de liaison issues du frottement – Contact linéaire	
4. Equilibre de solides. Etude analytique	
5. Equilibre de solides. Statique graphique	
6. Assemblage isostatique	
7. Assemblage hyperstatique	
8. Equilibre d'un ensemble de solides	

M4. DYNAMIQUE DU SOLIDE**ELEMENTS SYNTHÉTIQUES DE COURS**

- M4.1. Le principe fondamental de la dynamique du solide : PFD 115
1. Torseur cinétique ou des quantités de mouvement
 2. Opérateur ou tenseur d'inertie d'un solide
 3. Torseur dynamique ou des quantités d'accélération
 4. Principe fondamental de la dynamique – PFD
- M4.2. Théorème de la puissance ou de l'énergie cinétique 145
1. Energie cinétique d'un solide ou un ensemble de solides par rapport à un repère
 2. Puissances développées par des efforts extérieurs et intérieurs
 3. Théorème de la puissance ou de l'énergie cinétique

APPLICATIONS

- 161
1. Calculs de cinétique – Cas particulier des solides de révolution
 2. Matrice d'inertie – Changement de base et de point
 3. Cinétique et dynamique – Application du PFD
 4. Application du PFD – Equilibrage des corps tournants
 5. Application du théorème de l'énergie cinétique ou de la puissance – Notion de rendement
 6. Dissipations énergétiques et rendement dans les liaisons à mobilité
 7. Rendement des structures composées d'éléments en parallèle ou (et) série

Partie T. THÉORIE DES MÉCANISMES**T1. LIAISONS COMPOSÉES****ELEMENTS SYNTHÉTIQUES DE COURS**

- T1.1. Structure et Modélisation d'une liaison composée – Cas de la liaison pivot 189
1. Structure de la liaison composée
 2. Modélisation au second degré
 3. Justification
- T1.2. Etude mécanique – Détermination des actions de liaison 192
1. Cas d'un assemblage isostatique
 2. Cas d'un assemblage hyperstatique

APPLICATIONS

..... 197

La liaison glissière

T2. CHÂÎNES FERMÉES DE SOLIDES**ELEMENTS SYNTHÉTIQUES DE COURS**

- T2.1. Modélisation et structure d'une chaîne fermée simple de solides 201
1. Modélisation et schématisation
 2. Structure des chaînes de solides

T2.2. Analyse statique du mécanisme.....	203
1. Schématisation, paramétrage du mécanisme et modélisation des liaisons	
2. Méthode et résolution du problème de statique	
3. Iso ou hyperstaticité du mécanisme	
T2.3. Analyse cinématique du mécanisme.....	209
1. Modélisation des liaisons – Torseurs cinématiques	
2. Méthode et résolution du problème de cinématique	
3. Iso ou hyperstaticité du mécanisme	
T2.4. Analyse géométrique du mécanisme.....	212
1. Méthode	
2. Résolution du problème de géométrie – Loi entrée-sortie	
T2.5. Formule des mobilités.....	212
1. Cas des chaînes simples	
2. Cas des chaînes complexes	
APPLICATIONS	213
1. Chaîne fermée simple de solides	
2. Chaîne fermée complexe de solides	

Partie A. AUTOMATIQUE – ASSERVISSEMENTS

A1. FONCTIONS DE TRANSFERT ET SCHÉMAS-BLOCS

ELEMENTS SYNTHÉTIQUES DE COURS

A1.1. Equations différentielles du comportement d'un système mécanique – Transformées de Laplace et fonction de transfert.....	221
1. Equations différentielles du comportement de la chaîne de puissance	
2. Transformée de Laplace	
A1.2. Schéma-bloc et fonction de transfert.....	225
1. Construction d'un schéma-bloc	
2. Construction d'une fonction de transfert à partir du schéma-bloc	
3. Schéma-bloc avec perturbation	
A1.3. Fonction de transfert en boucle ouverte FTBO et en boucle fermée FTBF.....	230
1. Structure et schéma-bloc du système asservi	
2. Fonction de transfert en boucle ouverte et en boucle fermée – Formule de Black	
3. Autres usages de la formule de Black	
4. Boucles imbriquées	

A2. REPONSES INDICIELLES

ELEMENTS SYNTHÉTIQUES DE COURS

A2.1. Fonction de transfert d'un système asservi – Les consignes indicielles.....	239
1. La transformation du signal d'entrée en signal de sortie – Fonction de transfert	
2. Les consignes de type signaux canoniques	
A2.2. Comportement d'un système asservi avec consignes du type canoniques.....	241
1. Les fonctions de transfert du premier ordre	
2. Les fonctions de transfert du second ordre	
3. Théorèmes de la valeur finale et de la valeur initiale	
4. Ecart statique ou dynamique en boucle fermée	

APPLICATIONS	249
1. Comparaison des comportements en BO et BF avec fonction de transfert du premier ordre – Vitesse et précision sous une consigne canonique	
2. Transformée inverse pour une fonction de transfert du second ordre dans le cas d'une consigne en échelon	
A3. ANALYSE FRÉQUENTIELLE	
ELEMENTS SYNTHÉTIQUES DE COURS	
A3.1. Fonction de transfert complexe – Gain et phase	253
A3.2. Cas d'une fonction de transfert du premier ordre.....	254
1. Gain et phase – Diagrammes de Bode	
2. Diagramme de Nyquist	
3. Diagramme de Black	
A3.3. Cas d'une fonction de transfert du second ordre	257
1. Gain et phase – Diagrammes de Bode	
2. Diagramme de Black	
APPLICATIONS	261
1. Comparaison des comportements en BO et BF avec fonction de transfert du premier ordre – Diagrammes de Bode	
2. Comparaison des comportements en BO et BF avec fonction de transfert du second ordre – Diagrammes de Bode	
A4. PRECISION – STABILITÉ – CORRECTEURS	
ELEMENTS SYNTHÉTIQUES DE COURS	
A4.1. Précision et stabilité	267
1. Précision	
2. Stabilité	
A4.2. Les correcteurs	271
1. Le correcteur proportionnel	
2. Le correcteur intégral	
3. Le correcteur dérivé	
APPLICATIONS	277
1. Evaluation de l'écart entre entrée et sortie dans un cas de fonctionnement avec perturbation	
2. Evaluation de l'écart entre entrée et sortie dans un cas de fonctionnement avec perturbation et correcteur	

M1. GEOMETRIE

ELEMENTS SYNTHÉTIQUES DE COURS

Ce chapitre aborde la définition géométrique des mécanismes et, en particulier, leur paramétrage. Ceci sous-tend :

- le paramétrage de la position d'un solide dans l'espace (position d'un point caractéristique et orientation angulaire),
- le paramétrage des degrés de liberté des liaisons qui relient plusieurs solides.

Ce paramétrage permet :

- de déterminer la trajectoire d'un point par rapport à un repère (cas particulier des chaînes ouvertes de solides),
- de déterminer les relations entre paramètres géométriques variables (cas des chaînes ouvertes de solides et aussi des chaînes fermées lors de recherche de la loi entrée-sortie géométrique).

M1.1. NOTION DE BASE ET DE REPÈRE

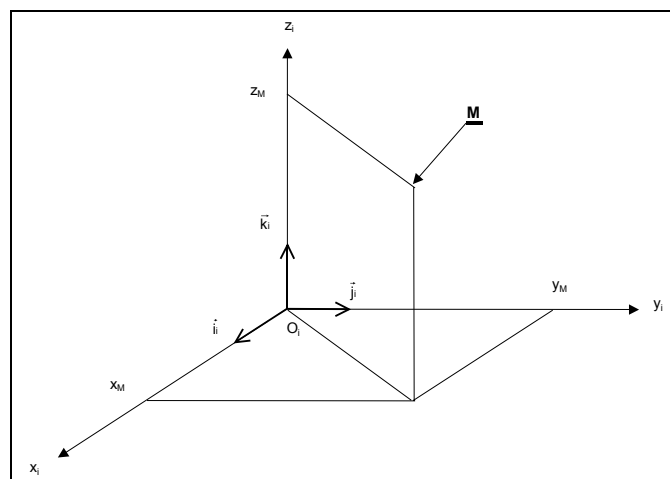
1. Définitions

Les positions, déplacements, vitesses et accélérations d'un point M sont définis ou mesurés par rapport à un référentiel. Ce dernier est caractérisé par un repère orthonormé direct R_i (i : indice permettant de différencier divers repères) constitué d'une origine O_i et de trois vecteurs unitaires linéairement indépendants $\vec{i}_i, \vec{j}_i, \vec{k}_i$ portés par les axes x_i, y_i, z_i .

- le repère est noté $R_i(O_i, x_i, y_i, z_i)$,
- les trois vecteurs unitaires, associés à ce repère, constituent une base $B_i(\vec{i}_i, \vec{j}_i, \vec{k}_i)$,

alors le vecteur position du point M par rapport au repère (ou référentiel) R_i est noté :

$$\vec{O_iM} = x_M \cdot \vec{i}_i + y_M \cdot \vec{j}_i + z_M \cdot \vec{k}_i$$



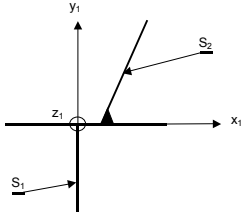
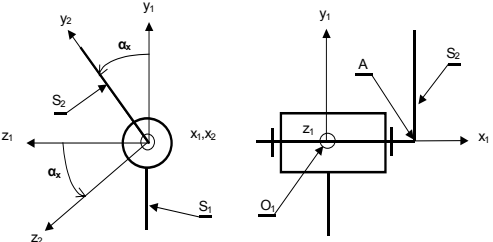
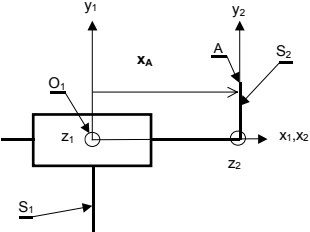
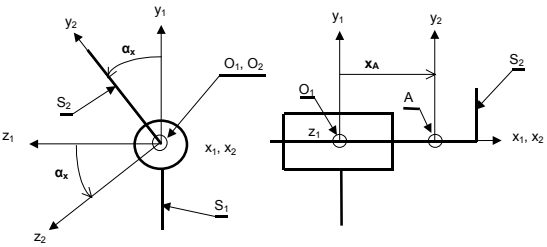
Le tableau qui suit précise la forme des torseurs des actions mécaniques, transmises par les liaisons classiques, en termes de composantes dans une base précisée sur le

schéma : $\{\mathcal{F}(1 \rightarrow 2)\} = \begin{Bmatrix} X_A & L_A \\ Y_A & M_A \\ Z_A & N_A \end{Bmatrix}_{A, B_1}$, dans la base B_1 . Dans les problèmes de mécanique,

ces composantes sont en général inconnues. Elles sont majoritairement appelées **inconnues statiques**, cette dénomination est justifiée en statique mais beaucoup moins en dynamique. Dans ce dernier cas, on préférera la dénomination **inconnues de liaison** ou **inconnues d'intereffort** (chapitre M4. Dynamique).

Si on note l_{c_i} , le nombre de degrés de liberté de la liaison (voir chapitre M2) alors le nombre de composantes l_{s_i} du torseur des actions de liaison est égal à $(6 - l_{c_i})$:

$$l_{s_i} = 6 - l_{c_i}$$

Nom de la liaison (l_{s_i})	Schématisation	Torseur cinématique
Encastrement (6)		$\{\mathcal{F}(1 \rightarrow 2)\} = \begin{Bmatrix} X_A & L_A \\ Y_A & M_A \\ Z_A & N_A \end{Bmatrix}_{A, B_1}$ <p>A point quelconque de l'espace</p>
Pivot (5)		$\{\mathcal{F}(1 \rightarrow 2)\} = \begin{Bmatrix} X_A & 0 \\ Y_A & M_A \\ Z_A & N_A \end{Bmatrix}_{A, B_1}$ <p>A point quelconque de l'axe O_1, x_1</p>
Glissière (5)		$\{\mathcal{F}(1 \rightarrow 2)\} = \begin{Bmatrix} 0 & L_A \\ Y_A & M_A \\ Z_A & N_A \end{Bmatrix}_{A, B_1}$ <p>A point quelconque de l'espace</p>
Pivot glissant (4)		$\{\mathcal{F}(1 \rightarrow 2)\} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ Y_A & M_A \\ Z_A & N_A \end{Bmatrix}_{A, B_1}$ <p>A point quelconque de l'axe O_1, x_1</p>

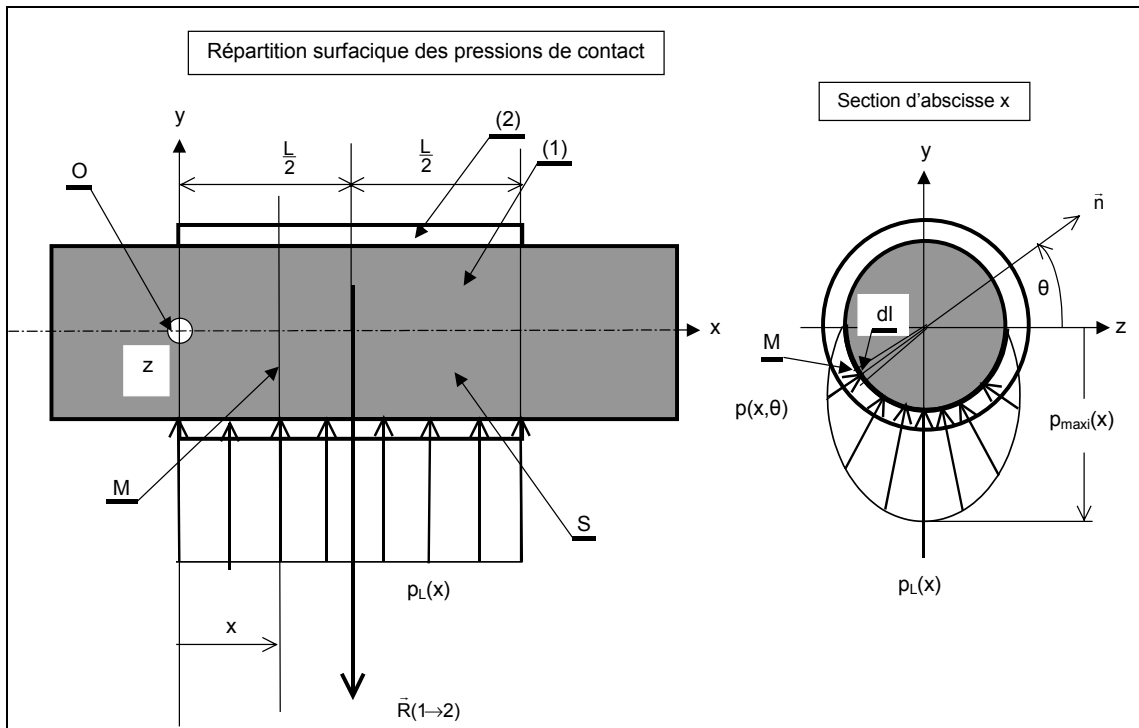
APPLICATIONS

1. Résultante et calcul de pressions de contact - Liaison pivot glissant

L'arbre (1) est en liaison pivot glissant avec l'alésage (2). Il exerce sur ce dernier une charge radiale de résultante $\vec{R}(1 \rightarrow 2)$ située au milieu O_1 du contact, alors la répartition de pression $p(x, \theta)$ est identique quel que soit x . Dans une section à l'abscisse x , la pression de contact $p(x, \theta)$ est fonction de l'angle θ . On suppose que la charge radiale est suffisante pour que le contact ait lieu selon un arc de 180° (vue à droite). La pénétration radiale de l'arbre dans le moyeu conduit à une déformation en M du type $d(\theta) = d_{\max} \cdot \sin\theta$. Dans l'hypothèse où pression de contact et déformation radiales sont proportionnelles, on admet donc le modèle de pression suivant : $p(\theta) = p_{\max} \cdot \sin\theta$.

Q₁. On nomme $p_L(x)$ la pression linéique, résultante des pressions de contact dans une section à l'abscisse x (voir vues). Déterminer $p_L(x)$ en fonction du module $R(2 \rightarrow 1)$ et de la longueur L du contact.

Q₂. Déterminer $p_L(x)$ en fonction du rayon r et de p_{\max} .



2. Résultante et calcul de pressions de contact - Liaison glissière

Ce modèle de répartition concerne d'une part les liaisons pivots et pivots glissants en association, dans une section, avec le modèle des pressions radiales défini précédemment et d'autre part les liaisons glissières. L'effort F est en porte-à-faux. L'arbre ou le coulisseau étant supposés plus durs que le moyeu ou la glissière, l'enfoncement $\delta_M(x)$ est linéaire et son évolution a la même pente dans les deux zones de contact (voir première figure ci-après). On admet donc que l'évolution des pressions est linéaire. La zone totale de contact n'est pas forcément complète et une zone non chargée « e » peut exister (voir figure qui suit), cela dépend de la charge F , des matériaux (module d'Young E) et du jeu initial de la liaison.

Les dimensions de la glissière sont connues : longueur L (selon x_1), largeur l (selon y_1), hauteur h (selon z_1), de même que la force F et sa position (a).

Le levier est soumis à trois forces : $\vec{R}(1 \rightarrow 2)$, $\vec{R}(4 \rightarrow 2)$ et la charge \vec{F}_c , d'après les éléments théoriques du chapitre M3.3, leurs supports sont concourants. On connaît les supports de $\vec{R}(4 \rightarrow 2)$ et \vec{F}_c qui se coupent en I_2 alors le support de $\vec{R}(1 \rightarrow 2)$ passe aussi par ce point. Les trois supports étant connus, tracer le dynamique à partir de parallèles aux supports et de l'intensité de la charge. Le rapport des « longueurs graphiques » des modules de $\vec{R}(4 \rightarrow 2)$ et \vec{F}_c est $\frac{R(4 \rightarrow 2)}{F_c} = 2,3$ donc $R(4 \rightarrow 2) = 23\ 000\text{ N}$.

Application 6

R1.a. $\{\mathcal{F}(1 \rightarrow \text{roulement A})\} = \begin{Bmatrix} X_A & 0 \\ Y_A & 0 \\ Z_A & 0 \end{Bmatrix}_{A,B_1}$ et $\{\mathcal{F}(1 \rightarrow \text{roulement B})\} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ Y_B & 0 \\ Z_B & 0 \end{Bmatrix}_{B,B_1}$

b. Isoler l'arbre (2), les deux roulements ainsi que le pignon (2'). Le torseur des actions de (1) sur (2) se découple en deux torseurs, l'un en A et l'autre en B définis ci-dessus.

$\{\mathcal{F}(1 \rightarrow \text{Roulement A})\} + \{\mathcal{F}(1 \rightarrow \text{Roulement B})\} + \{\mathcal{F}(4 \rightarrow 2)\} + \{\mathcal{F}(3 \rightarrow 2')\} = \{0\}$.

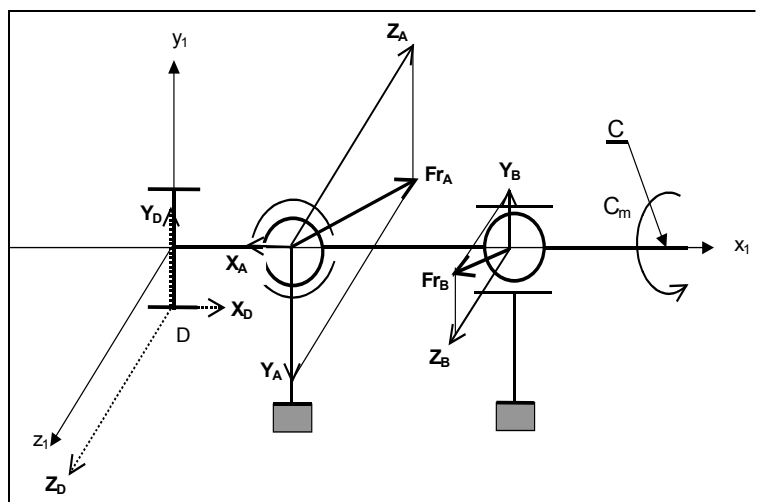
Au point A et en projection dans la base B_1 , le système d'équations qui traduit l'équilibre de l'arbre (2) est le suivant :

$X_A + 840 = 0$ (1) $-25.4000 + 100\ 000 = 0$ (4) ou $0 = 0$ (4)
 $Y_A + Y_B + 1\ 460 = 0$ (2) $-100.Z_B + 4\ 000.50 = 0$ (5) ou $-100.Z_B + 200\ 000 = 0$ (5)
 $Z_A + Z_B + 4\ 000 = 0$ (3) $100.Y_B + 840.25 - 1\ 460.50 = 0$ (6) ou $100.Y_B - 52\ 000 = 0$ (6)

L'équation (4), qui correspond au degré de liberté de la liaison pivot, concerne l'équation de mouvement de l'arbre. Elle ne fait pas intervenir d'inconnues de liaison, elle est dite non significative pour la détermination des inconnues de liaison. Le bilan statique global est donc :

- 5 inconnues de liaison,
- 5 équations significatives
- ⇒ l'assemblage arbre (2)-moyeu (1) est isostatique.

R2. Actions de liaisons.



$X_A = -840\text{ N}$,
 $Y_A = -1\ 980\text{ N}$,
 $Z_A = -6\ 000\text{ N}$,
 $Y_B = 520\text{ N}$,
 $Z_B = 2\ 000\text{ N}$
 $F_{aA} = |X_A| = 840\text{ N}$
 $F_{rA} = \sqrt{Y_A^2 + Z_A^2} = 6\ 318\text{ N}$ $F_{aB} = 0$,
 $F_{rB} = \sqrt{Y_B^2 + Z_B^2} = 2\ 067\text{ N}$

Le roulement le plus chargé est le plus près de la charge radiale en D.

Application 7

R1.a. Torseurs des actions de liaison :