

## FR 5.3B > LES CRITÈRES DE DÉCISION EN AVENIR ALÉATOIRE

Une décision de gestion (d'investissement en particulier) peut être placée dans 3 contextes différents :

- **la certitude** : les conséquences de la décision, les valeurs des variables essentielles sont connues avec certitude (→ voir FR 5.2 et FR 5.3),
- **l'incertitude** : les conséquences de la décision, les valeurs des variables essentielles sont incertaines ; elles sont connues avec une certaine probabilité (aléatoire) de réalisation ; le risque est mesurable (c'est l'objet de cette FR 5.3B) ;
- **le risque** : la probabilisation des conséquences de la décision est impossible (*hors référentiel de BTS CGO*).

On peut définir le risque comme l'écart entre la valeur effective d'une variable et sa valeur anticipée.

Le risque peut être **économique** (modifications de l'environnement ou erreurs humaines) ; il est alors mesurable par la variation du résultat d'exploitation ; il peut aussi être **financier** (lié à la structure financière de l'entreprise) ; il est alors mesurable par la variation du résultat net.

### 1 ■ L'analyse « espérance - variance »

- En investissement, l'avenir probabiliste est une situation dans laquelle il est possible de déterminer toutes les valeurs que peut prendre la CAF ou le flux net de trésorerie (FnT) relatif à un exercice donné et d'affecter une probabilité à chacune de ces valeurs. Ce FnT devient une variable aléatoire (X) dont on connaît la loi.
- Les flux d'investissement sont considérés comme certains, et les **FnT** sont considérés comme aléatoires.
- Le taux d'actualisation **i** correspond au rendement attendu sans prendre en compte une prime de risque (c'est un taux « libre de risque ») ; celui-ci est estimé par la dispersion des valeurs probables de la VAN.
- On peut alors calculer l'espérance de la VAN, sa variance et son écart-type :

|  |  |
|--|--|
| <b>E(VAN) : évalue la rentabilité</b>                                    | $E(VAN) = \sum [E(FnT_n) \times (1 + i)^{-n}]$                                     |
| <b>V(VAN) et <math>\sigma_{VAN}</math> : donnent la mesure du risque</b> | $V(VAN) = \sum [V(FnT_n) \times (1 + i)^{-2n}]$<br>$\sigma_{VAN} = [V(VAN)]^{1/2}$ |

**Exemple :** L'entreprise **OVALTA** utilise comme critère de sélection de ses investissements la VAN. Elle envisage un investissement de 150 000 € sur 3 ans dans un environnement incertain. Trois hypothèses sont retenues : environnement optimiste, moyen et pessimiste. Le taux de rendement attendu « libre de risque » est estimé à 8 %.

La probabilité correspondant à chaque hypothèse est précisée dans le tableau suivant avec les FnT obtenus en fin de 1<sup>ère</sup> année, 2<sup>ème</sup> année et 3<sup>ème</sup> année :

|          |      | 1   |                  |             | 2          |   |                   | 3          |           |   |                   |
|----------|------|---|------------------|-------------|------------|---|-------------------|------------|-----------|---|-------------------|
|          |      | Proba   | FnT              | FnT × Proba | Proba      | FnT   | FnT × Proba       | Proba      | FnT       | FnT × Proba                                   |                   |
| <b>O</b> | 0,20 | 22 500,00                                     | 4 500,00         | 0,40        | 90 000,00  | 36 000,00                                     | 0,10              | 90 000,00  | 9 000,00  |   |                   |
| <b>M</b> | 0,30 | 25 500,00                                     | 7 650,00         | 0,30        | 105 000,00 | 31 500,00                                     | 0,70              | 120 000,00 | 84 000,00 |   |                   |
| <b>P</b> | 0,50 | 27 000,00                                     | 13 500,00        | 0,30        | 120 000,00 | 36 000,00                                     | 0,20              | 142 500,00 | 28 500,00 |   |                   |
|          |      | <b>E(FnT<sub>1</sub>) =</b>                   | <b>25 650,00</b> |             |            | <b>E(FnT<sub>2</sub>) =</b>                   | <b>103 500,00</b> |            |           | <b>E(FnT<sub>3</sub>) =</b>                   | <b>121 500,00</b> |
|          |      | <b>V(FnT<sub>1</sub>) =</b>                   | 2 902 500,00     |             |            | <b>V(FnT<sub>2</sub>) =</b>                   | 155 250 000,00    |            |           | <b>V(FnT<sub>3</sub>) =</b>                   | 189 000 000,00    |
|          |      | <b><math>\sigma</math>(FnT<sub>1</sub>) =</b> | <b>1 703,67</b>  |             |            | <b><math>\sigma</math>(FnT<sub>2</sub>) =</b> | <b>12 459,94</b>  |            |           | <b><math>\sigma</math>(FnT<sub>3</sub>) =</b> | <b>13 747,73</b>  |

Avec :  $E(FnT_1) = \sum (FnT \times Proba)$   
 $V(FnT_1) = \sum (FnT^2 \times Proba) - E(FnT_1)^2$

|                                   |                       |   |
|-----------------------------------|-----------------------|---|
| <b>E(VAN) =</b>                   | <b>58 935,19</b>      | $= -150\,000 + 25\,650 \times 1,08^{-1} + 103\,500 \times 1,08^{-2} + 121\,500 \times 1,08^{-3}$                            |
| <b>V(VAN) =</b>                   | <b>235 703 870,05</b> | $= 1\,290\,000 \times 1,08^{-2 \times 1} + 69\,000\,000 \times 1,08^{-2 \times 2} + 84\,000\,000 \times 1,08^{-2 \times 3}$ |
| <b><math>\sigma</math>(VAN) =</b> | <b>15 352,65</b>      | $= [235\,703\,870,05]^{1/2}$  |

Le projet est globalement rentable car E(VAN) est positif ; le risque est de 25 % de E(VAN) ; il peut être considéré comme élevé.

**En cas de projets concurrents on choisira le projet dont l' E(VAN) est maximum et/ou  $\sigma$ (VAN) est minimum : le gain le plus élevé pour le risque le plus faible.**

## 2 ■ Les arbres de décision (décisions séquentielles)

L'arbre de décision a pour objet de représenter graphiquement :

- les différentes possibilités matérielles attachées au développement du projet,
- la probabilisation des anticipations concernant le contexte futur (état de la nature).

### Méthode :

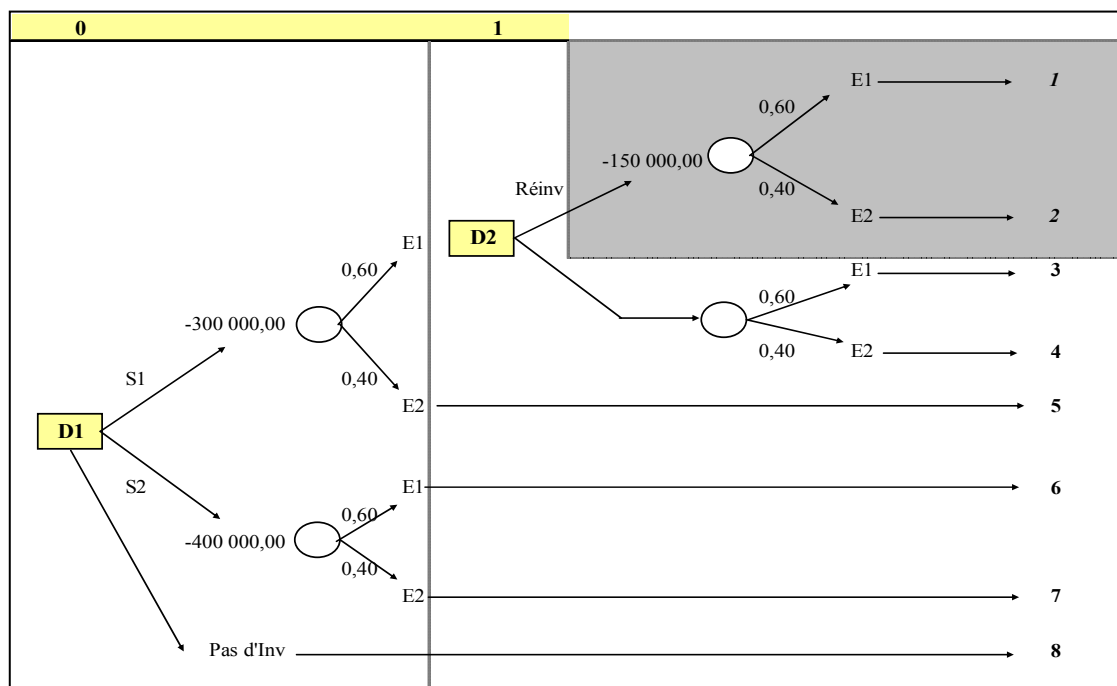
- identifier les différentes possibilités de développement du projet et mesurer les paramètres
- identifier les différents moments de décisions,
- représenter graphiquement le problème (les décisions sont représentées par des carrés, les événements par des ronds),
- estimer la distribution des probabilités associées aux événements aléatoires,
- évaluer le FnT et calculer la VAN de chaque chemin (branche) au taux d'actualisation libre de risque,
- analyser les nœuds décisionnels :
  - calculer l'E(VAN) induite par chaque décision (partie droite du point décisionnel),
  - retenir le chemin à l'E(VAN) maxi,
  - éliminer les chemins dominés,
  - la partie gauche du point décisionnel est valorisée en tenant compte de ces éliminations ;
- sélectionner la séquence optimale qui maximise l'E(VAN).

**Exemple :** L'entreprise **OVALTA** hésite entre 2 stratégies concernant le lancement de la fabrication d'un nouveau produit : soit investir en 2 temps si l'environnement est favorable (S1), ou investir en une seule fois (S2), avec bien sûr la solution de ne pas investir (S3). Les services économiques estiment à 60 % la probabilité que l'environnement sera favorable (E1) et donc à 40 % que cet environnement ne sera pas favorable (E2). Le taux de rendement attendu libre de risque est de 10 %.

La durée d'analyse de l'investissement est de 4 ans. Les conditions des 2 solutions sont les suivantes :

- **S1** : investir 300 000 € en début de 1<sup>ère</sup> période (0) et réinvestir 150 000 € en fin de 1<sup>ère</sup> période (1) si l'environnement est favorable (E1) ; les FnT seront de 100 000 € en fin de 1<sup>ère</sup> période (1) puis de 175 000 € si l'environnement est favorable (E1) ou de 150 000 € s'il n'est pas favorable (E2) ; ils seront de 100 000 € sur 4 ans si l'environnement n'est pas favorable
- **S2** : investir 400 000 € en début de 1<sup>ère</sup> période (0) ce qui procurerait des FnT de 140 000 € si l'environnement est favorable (E1) ou de 125 000 € s'il n'est pas favorable (E2) ;
- **S3** : ne pas investir, donc FnT futurs = 0.

L'arbre de décision se présente ainsi :



2 décisions (nœuds décisionnels) sont à analyser : quelles décisions prendre ?

→ **À la date 1 : D2 : faut-il réinvestir ?** Il faut calculer l'espérance de VAN [E(VAN)] à cette date :

- si réinvestissement = chemins 1 et 2 :

$$E(VAN_1) = -150\,000 + 0,6 \times 175\,000 \times \frac{1 - 1,1^{-3}}{0,1} + 0,4 \times 150\,000 \times \frac{1 - 1,1^{-3}}{0,1} = 260\,330,58$$

- si non réinvestissement = chemins 3 et 4 :

$$E(VAN_2) = -0 + 0,6 \times 115\,000 \times \frac{1 - 1,1^{-3}}{0,1} + 0,4 \times 100\,000 \times \frac{1 - 1,1^{-3}}{0,1} = 271\,066,87$$

$E(VAN_2) > E(VAN_1)$  : **il ne faut pas réinvestir** ; les chemins 1 et 2 doivent être abandonnés (grisé et entourés en pointillés)

→ **À la date 0 : D1 : faut-il investir 300 000 € ou 400 000 € ?**

Il faut calculer l'espérance de VAN [E(VAN)] à cette date :

- si 300 000 € = chemins 3 et 4 (déjà calculée jusqu'à D2) + chemin 5 :

$$E(VAN_1) = -300\,000 + 0,6 \times (100\,000 + 271\,066,87) \times 1,1^{-1} + 0,4 \times 100\,000 \times \frac{1 - 1,1^{-4}}{0,1} = 29\,194,73$$

- si 400 000 € = chemins 6 et 7 :

$$E(VAN_2) = -400\,000 + 0,6 \times 140\,000 \times \frac{1 - 1,1^{-4}}{0,1} + 0,4 \times 125\,000 \times \frac{1 - 1,1^{-4}}{0,1} = 24\,761,97$$

- si pas d'investissement = chemin 8 :  $E(VAN) = 0$

$E(VAN_1) > E(VAN_2)$  : **il faut investir 300 000 € et ne pas réinvestir.**

2 ■ Rappels de statistiques et probabilités

| Statistiques  | Probabilité  |
|---|--|
| <p><b>Définition</b> : la probabilité qu'un évènement noté <math>(X=x_i)</math> se réalise est le nombre <math>P(X=x_i)</math> avec <math>P(X=x_i) \in [0 ; 1]</math>.<br/>                 Deux variables aléatoires X et Y sont dites indépendantes si <math>P((X=x) \cap (Y=y)) = P(X=x) \times P(Y=y)</math></p>  |  |
| <p><b>Moyenne arithmétique</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li><b>Définition</b> :</li> </ul> $\bar{x} = \frac{1}{\text{nombre de valeurs}} \times \sum n_i \times x_i$ <ul style="list-style-type: none"> <li><b>Propriétés</b></li> </ul> $a\bar{x} = a \times \bar{x}$ $\overline{ax + b} = a \bar{x} + b$ $\overline{x + y} = \bar{x} + \bar{y}$ | <p><b>Espérance mathématique</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li><b>Définition</b></li> </ul> $E(X) = \sum x_i \times P(X=x_i)$ <ul style="list-style-type: none"> <li><b>Propriétés</b></li> </ul> $E(aX) = a E(X)$ $E(aX+b) = a E(X) + b$ $E(X + Y) = E(X) + E(Y)$  |
| <p><b>Covariance</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li><b>Définition</b> :</li> </ul> $\text{Cov}(x,y) = \frac{1}{N} \sum (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})$ $\text{Cov}(x,y) = \frac{1}{N} \sum x_i y_i - \bar{x} \bar{y}$   | <p><b>Covariance</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li><b>Définition</b> :</li> </ul> $\text{Cov}(X,Y) = E[(X - E(X))(Y - E(Y))]$ $\text{Cov}(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$  |
| <p><b>Variance</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li><b>Définition</b></li> </ul> $V(x) = \frac{1}{N} \sum n_i x_i^2 - \bar{x}^2$  | <p><b>Variance</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li><b>Définition</b></li> </ul> $V(X) = E[(X - E(X))^2] = E(X^2) - E(X)^2$ $V(X) = \sum x_i^2 P(X=x_i) - E(X)^2$ <ul style="list-style-type: none"> <li><b>Propriétés</b></li> </ul> <ul style="list-style-type: none"> <li><math>V(aX) = a^2 V(X)</math></li> <li><math>V(aX+b) = a^2 V(X)</math></li> <li>Si X et Y indépendants alors : <math>V(X + Y) = V(X) + V(Y) = V(X-Y)</math></li> <li>Cas général :                             <ul style="list-style-type: none"> <li><math>V(X+Y) = V(X) + V(Y) + 2 \text{cov}(X,Y)</math></li> <li><math>V(X-Y) = V(X) + V(Y) - 2 \text{cov}(X,Y)</math></li> </ul> </li> </ul> |
| <p><b>Écart-type</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li><b>Définition</b> : <math>\sigma(X) = \sqrt{V(X)}</math></li> <li><b>Propriétés</b></li> </ul> $\sigma(aX) =  a  \sigma(X)$ $\sigma(aX+b) =  a  \sigma(X)$  |  |

## ACTIVITÉ 5.2 (SUITE) > LES CHOIX D'INVESTISSEMENTS

### [ Entraînements ]

#### Entraînement 1 ■ TOURTEST

La SA **TOURTEST** s'est spécialisée dans la fabrication de profilés d'aluminium qu'elle vend essentiellement à des fabricants d'huisseries en aluminium émaillé (fenêtres, portes-fenêtres, volets roulants, portes de garages, etc.). Dans le cadre d'une éventuelle opération de restructuration, ses dirigeants veulent étudier le projet de fabrication et de commercialisation d'un nouveau produit : le SR 1000.

Ils vous proposent de réaliser cette étude grâce à la technique des arbres de décision. Les informations sur la décision d'investissement sont fournies en *annexe*.

*Travail  
à  
faire*

- 1 - Établissez l'arbre de décision correspondant.
- 2 - Recherchez à l'aide de cet arbre de décision la meilleure stratégie pour la Société TOURTEST (on retiendra pour chaque décision la stratégie qui maximise les flux nets de trésorerie (FnT) espérés).
- 3 - Conformément à la stratégie retenue au 2 (investissement ou sous-traitance) :
  - a - déterminez l'ensemble des résultats possibles ainsi que les probabilités correspondantes ;
  - b - évaluez par le calcul le risque du projet (écart-type) ;
  - c - concluez sur l'opportunité d'un tel projet.

#### Annexe ▶ Informations sur la décision d'investissement.

- 1 - Le coût d'étude et de lancement du SR 1000 s'élève au total à 500 000 €. Le service des études a estimé que cette opération avait 80 % de chances de succès et 20 % de risque d'échec.
- 2 - Si ce lancement s'avère être un succès, l'entreprise pourra choisir entre deux stratégies possibles :
  - première stratégie : fabriquer le produit nouveau grâce à un investissement global de 120 000 € ;
  - deuxième stratégie : faire appel à des sous-traitants.

En cas de succès, les capacités d'autofinancement (CAF) calculées en fonction de la demande, seraient les suivantes :

| Demande     | Forte       | Moyenne   | Faible    |
|-------------|-------------|-----------|-----------|
| CAF         | 1 000 000 € | 500 000 € | 140 000 € |
| Probabilité | 0,6         | 0,3       | 0,1       |

Toutefois, dans le cas où l'on décide d'investir et dans l'hypothèse d'une demande forte, l'entreprise, pour faire face à cette demande, pourrait :

- soit à nouveau augmenter son potentiel de production par un investissement de 140 000 € ;
- soit faire sous-traiter une partie de la production.

La capacité d'autofinancement qui en résulterait serait de 1 400 000 € dans l'hypothèse de l'investissement et de 1 200 000 € si on fait appel à la sous-traitance.

## Entraînement 2 ■ OPTIMEX

La Société **OPTIMEX** s'est spécialisée dans la fabrication de produits cosmétiques. L'entreprise vend essentiellement à des grossistes et à des professionnels; son activité est florissante, cela se traduit par un programme d'investissement ambitieux et le lancement d'une nouvelle gamme de produits.

La fabrication de cette nouvelle gamme exige un investissement supplémentaire de 380 000 €. Afin de vérifier la pertinence financière du projet, une étude prévisionnelle a été effectuée. On a pu ainsi chiffrer, dans plusieurs hypothèses, les flux nets de trésorerie attendus sur les deux années de production, ainsi que les probabilités correspondantes. (voir *annexe*)

Les flux nets de trésorerie obtenus la première et la deuxième année sont indépendants les uns des autres. Le taux d'actualisation retenu pour les calculs est de 15 %.

**Travail  
à  
faire**

1 - Établissez l'arbre de décision correspondant aux probabilités des différentes situations possibles.

2 - Mettez en évidence, sous forme de tableau, la valeur actuelle nette pour chaque cas possible.

3 -

*a* - Calculez l'espérance mathématique de la valeur actuelle nette.

*b* - Concluez quant à l'intérêt du projet.

### Annexe ► **Projet d'investissement : flux nets de trésorerie et probabilités**

|                              | Probabilités | Flux de trésorerie |
|------------------------------|--------------|--------------------|
| <b>Fin de première année</b> | 30 %         | 255 000            |
|                              | 40 %         | 285 000            |
|                              | 30 %         | 322 500            |
| <b>Fin de deuxième année</b> | 20 %         | 195 000            |
|                              | 50 %         | 225 000            |
|                              | 30 %         | 247 500            |

**Entraînement 3 ■ SOMECA**

La **SOMECA** est une entreprise industrielle dont l'essentiel de l'activité consiste à sous-traiter pour les industries automobile et aéronautique des accessoires et fournitures pour équiper les machines-outils. Elle s'est orientée depuis quelques années vers la fabrication de toutes sortes de pièces à base d'abrasifs utilisées pour parfaire la finition de nombreux produits industriels.

Du fait du succès de ces nouvelles activités, la SOMECA connaît depuis [N-2], un développement rapide qui explique sa politique d'investissement : elle a décidé d'investir dans des équipements plus productifs que ceux dont elle dispose actuellement.

Elle a le choix entre deux options :

- Acquisition début janvier [N+1] d'une machine A et d'une autre machine identique au début de janvier [N+2],
- Acquisition début janvier [N+1] d'une machine B.

Des informations recueillies par les services commerciaux et financiers vous sont fournies en **annexes 1, 2, et 3**.

**Travail à faire**

- 1 - Présentez l'arbre de décision permettant de mettre en évidence l'ensemble des cas possibles.
- 2 - Calculez les valeurs actuelles nettes associées à chacun de ces cas en retenant un taux d'actualisation de 8 %.  
*Nota : l'étude étant uniquement menée sur les deux années [N+1] et [N+2], ne pas tenir compte des valeurs résiduelles.*
- 3 - Indiquez l'investissement le plus intéressant selon le critère de l'espérance mathématique des valeurs actuelles nettes.

**Annexe 1 ▶ Coût d'acquisition des machines A et B**

Le coût d'acquisition d'une machine A au 1<sup>er</sup> janvier [N+1] est de 25 000 €. On peut estimer que ce coût sera le même au 1<sup>er</sup> janvier [N+2].  
Le coût d'acquisition d'une machine B au 1<sup>er</sup> janvier [N+1] est de 51 000 €.

**Annexe 2 ▶ Évolution probable de l'activité**

|                                     | [N+1] | [N+2]              |                 |
|-------------------------------------|-------|--------------------|-----------------|
| Croissance forte : probabilité 0,6  |       | Croissance forte   | probabilité 0,6 |
|                                     |       | Croissance moyenne | probabilité 0,4 |
| Croissance moyenne: probabilité 0,4 |       | Croissance forte   | probabilité 0,3 |
|                                     |       | Croissance moyenne | probabilité 0,7 |

**Annexe 3 ▶ Flux nets de trésorerie prévisibles (hors investissements)**

|  | [N+1]              |          | [N+2]              |          |
|--|--------------------|----------|--------------------|----------|
| Acquisition de deux machines de modèle A | Croissance forte   | 35 000 € | Croissance forte   | 40 000 € |
|  | Croissance moyenne | 30 000 € | Croissance moyenne | 32 000 € |
| Acquisition d'une machine B              | Croissance forte   | 38 000 € | Croissance forte   | 42 000 € |
|  | Croissance moyenne | 31 000 € | Croissance moyenne | 35 000 € |

**NB :** On admettra que les croissances annuelles sont indépendantes et les flux seront considérés comme acquis par l'entreprise en fin d'année.